ME410 - Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore
A.A. 2016/2017 – Valutazione "in itinere" – Seconda Prova

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) → ☐

Cognome: ....

Nnome: ....

AVVERTENZE: *Svolgere il tema, utilizzando al più 2 facciate di un foglio protocollo e scrivendo in modo chiaro e conciso (nel punteggio si terrà conto della leggibilità del testo elaborato).*

* * * * * * *

TEMA: Spazio topologico booleano duale di un'algebra booleana; algebra booleana duale di uno spazio topologico. Enunciato del Teorema di Stone (formulazione relativa alle algebre booleane e formulazione relativa agli spazi topologici booleani).

* * * * * * *

ESERCIZIO 1. Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$, si considerino le seguenti due fattorizzazioni in $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$:

$$(1+2\boldsymbol{i})(1-2\boldsymbol{i}) = 5 = (2+\boldsymbol{i})(2-\boldsymbol{i})\,.$$

Stabilire se e quali tra gli elementi 5, $1+2\boldsymbol{i}$, $1-2\boldsymbol{i}$, $2+\boldsymbol{i}$, e $2-\boldsymbol{i}$ sono elementi irriducibili o primi in $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ e se da tali fattorizzazioni del numero 5 si possa dedurre che $\mathbb{Z}[\boldsymbol{i}]$ non è un dominio a fattorizzazione unica.

ESERCIZIO 2.

(1) Dimostrare o negare la validità del seguente enunciato.
Sia $m \geq 1$, se l'm-esimo numero di Fibonacci F_m è primo allora il suo indice m è necessariamente primo, con l'eccezione di $m = 4$ (in tal caso $F_4 = 3$).

(2) Sapendo che $F_{20} = 6765$ e $F_{21} = 10946$, calcolare F_{18} e determinare esplicitamente $\mathrm{MCD}(F_{18}, F_{21})$ e $\mathrm{mcm}(F_{18}, F_{21})$.

ESERCIZIO 3.

(1) Dimostrare che ogni algebra booleana atomica e completa $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ è isomorfa (come algebra booleana) all'algebra booleana dell'insieme delle parti $P(X)$ di un qualche insieme non vuoto X (dove l'insieme X deve essere determinato esplicitamente in funzione dell'agebra booleana data $\boldsymbol{\mathcal{A}}$).

(2) Sia $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ l'algebra booleana canonicamente associata all'anello booleano $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.

(2a) Determinare l'insieme A degli atomi di $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

(2b) Stabilire se $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ sia un'algebra booleana completa. In caso affermativo, determinare un insieme $X(\boldsymbol{\mathcal{B}})$ per il quale esiste un isomorfismo di algebre booleane σ tra $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e l'algebra booleana dell'insieme delle parti $P(X(\boldsymbol{\mathcal{B}}))$; inoltre, descrivere esplicitamente almeno un isomorfismo $\sigma : \boldsymbol{\mathcal{B}} \to P(X(\boldsymbol{\mathcal{B}}))$.